Structure des groupes abéliens finis.

Leçon: 104, 102, 120

Rej: Caldero P.

On démontre ce théorème: (existence)

Théorème 1

Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ et des entiers $N_1, \dots, N_n$, où N_1 est l'exposant de G et $N_{i+1} | N_i$, tq

$$G \simeq \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/N_n\mathbb{Z}$$

La démonstration utilise la théorie des représentations et se base sur deux lemmes (à faire au choix au par rapport au temps).

Lemme 2

Soit G un groupe abélien fini.

i) Si $x \in G$ est d'ordre a, et si $y \in G$ est d'ordre b, et si a et b sont 1er entre eux alors xy est d'ordre ab.

ii) Si $a, b \in \mathbb{N}^*$, et si G contient des éléments d'ordre a et b, il contient un élément d'ordre $\text{ppcm}(a,b)$.

iii) Soit N l'exposant de G (le le max des ordres des éléments de G). Alors $\forall x \in G$, $x^N = 1$.

Rmq Ces trois résultats sont faux si G n'est pas abélien.

Par ex, si $G = S_3$.

Alors $S_3 = \{ id$ → ordre 1
$(1\,2), (1\,3), (2\,3)$ → ordre 2
$(1\,2\,3), (2\,1\,3) \}$ → ordre 3

i) $2 \wedge 3 = 1$ mais $(1\,2)(1\,2\,3) = (2\,3)$ est d'ordre 2

ii) aucun élt d'ordre $6 = 2 \times 3$

iii) $N = 3$, mais $(1\,2)^3 = (1\,2) \neq 1$.

Preuve (Lemme 2)

i) x et y commutent, donc $\forall m \in \mathbb{N}\ (xy)^m = x^m y^m$.

En particulier, $(xy)^{ab} = x^{ab} y^{ab} = 1$, donc $o(xy) \mid ab$.

Réciproquement, si $(xy)^m = 1$, alors $\begin{cases} 1 = (xy)^{am} = y^{am} \\ 1 = (xy)^{bm} = x^{bm} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} b \mid a_m \\ a \mid b_m \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{car } a \wedge b = 1}{\underbrace{b \mid m}} \Rightarrow ab \mid m$ car $a \wedge b = 1$.
$\quad\quad\quad

L'idée est d'utiliser le groupe dual $\hat{G}$ pour étudier le théorème.

Soit G un groupe. Alors $\hat{G}$ est un groupe pour la multiplication des caractères linéaires : $(\chi_1, \chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x) \; \forall x \in G$
$\forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$.
On peut donc parler légalement de $\hat{\hat{G}}$.

Lemme 2

Soit G un groupe abélien fini. Alors l'application

$$i : \left| \begin{array}{l} G \to \hat{\hat{G}} \\ x \mapsto \left| \begin{array}{l} \hat{G} \to \mathbb{C}^\times \\ \chi \mapsto \chi(x) = (i(x))(\chi) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de groupes.

Preuve (Lemme 2)

- Mq $i : G \to \hat{\hat{G}}$ est un morphisme de groupes.

  Soit $x, y \in G$. Alors pour tout $\chi \in \hat{G}$

  $$i(xy)(\chi) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = (i(x))(\chi)\,(i(y))(\chi)$$

  donc $i(xy) = i(x) \circ i(y)$.

- Mq $i : G \to \hat{\hat{G}}$ est une bijection.

  G est un groupe fini, abélien, donc $|\mathrm{Conj}(G)| = |G|$, et on sait que $|\mathrm{Conj}(G)| = |\underbrace{\mathrm{Irr}(G)}_{\substack{\text{caractères} \\ \text{irréductibles} \\ \text{de } G}}| = |\hat{G}|$ (car G est abélien).

  Ainsi $|G| = |\hat{G}|$ et de même $|\hat{G}| = |\hat{\hat{G}}|$, donc $|G| = |\hat{\hat{G}}| < +\infty$.
  Il suffit donc de montrer l'injectivité.

  Soit donc $x, y \in G$ tq $i(x) = i(y)$.
  On pose $P_x, P_y \in \hat{G}$ tels que $P_x(g) = \delta_{x,g}$, $P_y(g) = \delta_{y,g}$.

Alors on peut décomposer φ_x et φ_y sur la base des caractères linéaires de G. On a :

$$\begin{cases} \varphi_x = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle \varphi_x, \chi \rangle \chi \\ \varphi_y = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle \varphi_y, \chi \rangle \chi \end{cases}$$

On $\chi(x) = \chi(y)$ $\forall \chi \in \hat{G}$, donc :

$$\begin{cases} \langle \varphi_x, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\varphi_x(g)}\, \chi(g) = \frac{\chi(x)}{|G|} \\ \langle \varphi_y, \chi \rangle = \dots = \frac{\chi(y)}{|G|} \end{cases} \quad (=)$$

donc $\varphi_x = \varphi_y$, donc $\boxed{x = y}$

Ainsi $G \simeq \hat{\hat{G}}$.

On peut en déduire l'exposant de $\hat{G}$, connaissant celui de G. □

Lemme 3

Si G est un groupe abélien fini, alors G et $\hat{G}$ ont même exposant.

Preuve (Lemme 3)

Soient N_G l'exposant de G, et $N_{\hat{G}}$ celui de $\hat{G}$.

Soit $\chi \in \hat{G}$, alors

$$\forall x \in G,\ (\chi^{N_G})(x) = (\chi(x))^{N_G} = \chi(x^{N_G}) = \chi(1) = 1.$$

Donc $N_{\hat{G}} \mid N_G$.

De même, $N_{\hat{\hat{G}}} \mid N_{\hat{G}}$. On $\hat{\hat{G}} \simeq G$, donc $N(\hat{\hat{G}}) = N(G)$.

Ainsi $N(G) = N(\hat{\hat{G}}) \leq N(\hat{G}) \leq N(G)$.

↑ on a une égalité !

□

On peut désormais convenablement prouver le théorème.

Preuve (théorème 4)

On procède par récurrence sur $|G|$.

- Si $|G|=1$, c'est évident ($n=0$)
- Supposons donc que $|G|>1$, et notons $N=N_1$ l'exposant de G.

Alors $\forall x \in G$, $x^N=1$ (lemme 2, iii)).

Donc $\forall \chi \in \hat{G}$, alors pour $x \in G$, $\chi(x) \in \mu_N$, c'est une racine N-ième de l'unité.

Or N est aussi l'exposant de $\hat{G}$, et donc il existe $\chi_1 \in \hat{G}$ d'ordre N.

Or $\chi_1(G)$ est un sous-groupe du groupe cyclique μ_N, donc $\chi_1(G)=\mu_N$.

Il existe donc $x_1 \in G$ tq $\chi_1(x_1)=e^{\frac{2i\pi}{N}}$.

Or $o(x_1) \mid N$ car N est l'exposant du groupe G, et donc $o(x_1)=N$. ($x_1^{o(x_1)}=1 \Rightarrow \chi_1(x_1^{o(x_1)})=(\chi_1(x_1))^{o(x_1)}$
$= 1 = e^{2i\pi o(x_1)/N}$

donc $N \mid o(x_1)$).

Alors $H_1 := \langle x_1 \rangle \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

On note $G_1 = \ker \chi_1 = \{ g \in G : \chi_1(g)=1 \}$.

Tq $G \simeq H_1 \times G_1$, ce qui permettra de conclure, en appliquant par récurrence à G_1. (l'exposant d'un sous-groupe divise l'exposant du groupe).

Rappel : Si G groupe, $H, N < G$

1) $N \triangleleft G$ et $H \triangleleft G$

2) $H \cap N = \{e\}$

3) $G = HN$ (ou $|G| = |H| \cdot |N|$ si $|G| < +\infty$)

Alors $G \simeq N \times H$

G est abélien, donc clairement $H_1 \triangleleft G$ et $\overbrace{\mathrm{Ker}\, \chi_1}^{= G_1} \triangleleft G$

↳ tjrs le cas pour un noyau.

$\chi_1|_{H_1} : H_1 \to \mathbb{U}_N$ est un isomorphisme, car

χ_1 est surjectif et $|H_1| = |\mathbb{U}_N| = N$.

On note alors α son inverse : $\alpha : \mathbb{U}_N \to H_1$

Soit $x \in G$.

Alors $a := \alpha(\chi_1(x)) \in H_1$, et $b := a^{-1}x$ vérifie :

$$\chi_1(b) = \chi_1(a^{-1})\chi_1(x) = (\chi_1(a))^{-1}\chi_1(x)$$
$$= (\chi_1(\alpha(\chi_1(x))))^{-1}(\chi_1(x))$$
$$= \chi_1(x)^{-1}\chi_1(x)$$
$$= 1.$$

Donc tout $x \in G$ s'écrit sous la forme $x = ab$ avec $a \in H_1$ et $b \in G_1 = \mathrm{Ker}\, \chi_1$.

Et on a clairement $H_1 \cap G_1 = \{1\}$ car χ_1 injectif sur H_1.

Donc $G \simeq G_1 \times H_1$, on applique HR à G_1.

$\square$